

Hypergraphes de Petersen! Hypergraphes de Moore?

Jean François Maurras

*Université d'Aix-Marseille 2, Faculté de Luminy, CNRS VRA 816 Département d'Informatique, 163
avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France*

Received 22 July 1991

Résumé

Maurras J.F., Hypergraphes de Petersen! Hypergraphes de Moore?, Discrete Mathematics 111 (1993) 373–379.

On étudie ici des sous structures des plan projectifs finis $\text{Pg}(2, n)$ où n est impair. Dans ceux-ci les $(n+1)$ -arcs induisent une décomposition canonique.

Soit E l'ensemble des points, D celui des droites, appelons X l'ensemble des points d'un $(n+1)$ -arc. On obtient alors une partition de D en considérant F l'ensemble des droites rencontrant X en deux points, X' l'ensemble de celles qui le rencontrent en un point et $L = (D \setminus F) \setminus X'$. Ce dernier ensemble est composé des droites ne rencontrant pas X . De façon similaire l'ensemble des points se partitionne alors en X l'ensemble des points contenus dans une seule droite de X' , F' l'ensemble des points qui sont contenus dans deux droites de X' et L' celui des points contenus dans aucune droite de X' .

Les structures (X, F) et (X', F') sont isomorphes au graphe complet K_{n+1} .

Lorsque $n = 5$, (L, F') et (L', F) sont deux graphes isomorphes au graphe de Petersen (On trouve d'ailleurs aussi le graphe de Petersen comme sous structure de $\text{Pg}(2, 4)$.)

Lorsque $n > 5$ il est donc naturel de considérer ces structures comme des généralisations du graphe de Petersen. Ce sont alors des hypergraphes $(n-1)/2$ -uniformes, $(n+1)/2$ -réguliers. Dans ce papier on donne une méthode de description de ces hypergraphes qui apparaissent alors, ainsi que le graphe de Petersen, comme un couplage parfait complété par $(n-1)/2$ n -ensembles d'arêtes. Comme dans le graphe de Petersen ces n -ensembles d'arêtes induisent une partition des sommets en $(n-1)/2$ 'couches' telles que chaque arête du couplage parfait initial a un sommet dans chaque couche. Les constructions proposées sont simplement décrites, et non prouvées. Elles nous paraissent tout à fait générales; pour certaines d'entre elles la preuve de cette généralité n'est pas tout à fait évidente.

We study here substructures of finite projective planes $\text{Pg}(2, n)$ with n odd. In these planes the $(n+1)$ -arcs induce one canonical decomposition.

Let E be the set of points, D the one of lines, and X the set of points of an $(n+1)$ -arc. Thus, we have a partition of D considering F as the set of lines meeting X in two points, X' the set of lines meeting X in one point and $L = (D \setminus F) \setminus X'$. This set is composed of lines with no intersection with X . Similarly, the set of points is partitioned into X , the set of points contained in one single line of X' , F' the set of points contained in two lines of X' , and L' the set of points contained in no line of X' .

The structures (X, F) and (X', F') are isomorphic to K_{n+1} , the complete graph.

Correspondence to: Jean François Maurras, Groupe Intelligence Artificielle, Faculté des sciences de Luminy, 163, Ave. de Luminy. 13288 Marseille Cedex 9, France.

When $n = 5$, (L, F') and (L', F) are two graphs isomorphic to the Petersen graph (one finds also the Petersen graph as a substructure of $\text{Pg}(2, 4)$).

When $n > 5$, it is thus natural to consider those structures as generalisations of the Petersen graph. They are, thus, $(n-1)/2$ -uniform, $(n+1)/2$ -regular hypergraphs.

In this paper we give a description method of these hypergraphs, which look, like the Petersen graph, as a perfect matching completed by $(n-1)/2$ n -sets of edges. As in the Petersen graph, these n -sets of edges induce a partition of the vertices into $(n-1)/2$ levels such that each edge of the initial perfect matching has one vertex in each level. The proposed constructions are simply described without proof. However, they seem to be general; for some of these the proof may not be too easy.

Introduction

Le graphe de Petersen apparaît 'naturellement' comme sous structure du plan projectif d'ordre 5 (Fig. 1); et même doublement, comme sous structure des points et des droites.

On fera la confusion entre le plan projectif d'ensemble de points E et de droites D , et une représentation par sa matrice d'incidence $P(E, D)$.

On rappelle qu'un arc dans un plan projectif fini est un ensemble de points rencontré en au plus deux points par toute droite. D'autre part (cf. Fig. 1), points et droites sont interchangeable dans un plan projectif fini. Dans la représentation d'un tel plan par sa matrice d'incidence cet échange se fait par transposition. On a donc des arcs de droites.

Par référence à la représentation on les appelle des 'arcs (t pour transposition). De même on aura des 'designs.

Soit X l'ensemble des points d'un 6-arc, F' l'ensemble des 15 points, n'appartenant pas à X , des 6 tangentes (droites ayant un seul point commun avec X) à ce 6-arc. Soit L l'ensemble des 10 droites ne rencontrant pas X . La sous structure (L, F') de $\text{Pg}(2, 5)$ est isomorphe au graphe de Petersen:

$$X = \{e \in E, \forall d \in D, |d \cap X| \leq 2\} \quad \text{et} \quad |X| = 6,$$

$$F' = \bigcup_{|d \cap X| = 1} \{e \in d \setminus X\},$$

$$L = \{d \in D, d \cap X = \emptyset\}.$$

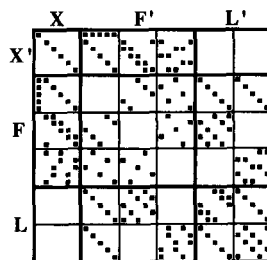


Fig. 1.

Soit F l'ensemble de ses 15 sécantes, le couple (X, F) est quant à lui isomorphe au graphe complet K_6 . Le couple (X', F') est lui aussi isomorphe à K_6 .

On parlera donc des graphes $G(X, F)$, $G(X', F')$, $G(L, F')$, $G(L', F)$. $G(L, F')$ et $G(X', F')$ (resp. $G(L', F)$ et $G(X, F)$) ont même ensemble d'arêtes F' (resp. F). Cette identification nous permet de considérer, par exemple, l'intersection avec F' d'une droite de F ou L comme un sous ensemble d'arêtes de $G(X', F')$; de même celle de F' avec une droite de X' ou F comme sous ensemble d'arêtes de $G(L, F')$. Il en est de même pour les deux autres graphes. Comme nous l'avons déjà remarqué ([3] par exemple) cette identification, jointe au fait que $P(E, D)$ est la matrice d'incidence d'un plan projectif (fini) implique que ces sous ensembles d'arêtes sont des couplages de ces graphes. En effet ce sous ensemble d'arêtes ne peut contenir deux fois le même sommet (du graphe), sommet qui dans le cas de $G(X', F')$ est une droite du plan, et deux droites du plan ont un seul point en commun.

On remarquera que les propriétés d'intersection des droites (resp. des points) d'un plan projectif impliquent que $G(X', F')$ est isomorphe à K_6 , le graphe complet à 6 sommets; de même $G(X, F)$. Il est facile de vérifier aussi que $G(L, F')$ et $G(L', F)$ sont isomorphes au graphe de Petersen.

En conséquence un élément de L (son intersection avec F') est un couplage parfait de $G(X', F')$, de même un élément de X' est un couplage parfait de $G(L, F')$. On a des propriétés analogues pour $G(X, F)$ et $G(L', F)$.

Comme on le voit sur la représentation de $\text{PG}(2, 5)$ proposée, on effectuera des raffinements des partitions des points E et des droites D déjà effectuées. Les arêtes de $G(X, F)$ (K_6) seront décomposées en l'ensemble de celles adjacentes à un sommet particularisé, celles du K_5 restant seront décomposées en 22-facteurs (ensemble d'arêtes rencontrant deux fois chacun des sommets), ici des cycles hamiltoniens.

De même les sommets de $G(L', F)$ seront décomposés en 2 sous ensembles. Il est clair que les arêtes correspondant au sommet particularisé de $G(X, F)$ forment un couplage parfait de $G(L', F)$, c'est ce couplage parfait qui induit la partition de L' .

On a, bien entendu, des partitions analogues pour $G(X, F)$ et $G(L, F')$.

Dans cet article on se sert de ces correspondances pour construire des 'Hypergraphes de Petersen' à partir des $(n+1)$ -arcs d'un plan projectif fini $\text{Pg}(2, n)$ avec n impair. On ne se contente pas de donner une définition de ces hypergraphes, on s'efforce de leur donner une représentation qui 'ressemble' au graphe de Petersen.

On commencera par justifier l'existence de ces Hypergraphes, on étudiera ensuite quelques propriétés, ce qui nous permettra d'effectuer des constructions.

A l'exception de l'existence aucune des propriétés n'est démontrée.

Matrice de permutation et K_6 (K_5 plus un sommet), K_5 est décomposé en deux cycles.

Transposé de K_6 , 2-couplages, et transposé du graphe de Petersen. Le Graphe de Petersen est représenté, naturellement, par un couplage parfait et deux cycles. Ces cycles sont en bijection avec ceux de K_5 .

Petersen et configuration (10, 10). Les lignes (resp. colonnes) de cette configuration sont les stables maximaux de cardinal minimum du graphe de Petersen.

Existence

Le théorème suivant, établi en [2] justifie l'existence de ces hypergraphes:

Lorsqu'un plan projectif $\text{Pg}(2, k \cdot p + 1)$, de matrice d'incidence $P(D, E)$ contient un $(k, 1; k \cdot (k \cdot p - p + 1))$ -design (F, X) , il contient aussi un $(k, 1; k \cdot (k \cdot p - p + 1))$ -design (X', F') . Par permutation des lignes et des points on a:

- (i) $P(X', X)$ est la matrice unité,
- (ii) $P(X', F')$ est (la matrice d'incidence d') un design de même type que le design (de matrice d'incidence) $P(X, F)$,
- (iii) Les lignes (resp. les colonnes) de $P(F, F')$ sont des $(k \cdot p - p)$ -couplages de (X, F) (resp. (X', F')),
- (iv) Les lignes de $P(L, F')$ (resp. les colonnes de $P(L', F)$) sont composées de $(k \cdot p + 1) \cdot (p - k + 2)(k \cdot p - p + 1)$ -couplages de (X, F) (resp. (X', F')). De plus les lignes de $P(F, L')$ (resp. les colonnes de $P(L, F')$) ont $p - k + 2$ points dans L' (resp. droites dans L).

La démonstration de ce résultat [2] repose sur les propriétés d'intersection des plans projectifs.

Commençons par l'interpréter sur l'exemple précédent.

L'ordre du plan est $5 = 2 \cdot 2 + 1$.

Le graphe $G(X, F)$ est un $(2, 1; 6)$ -design. Les $(2, 1; n)$ -designs existent pour tout $n \geq 2$ et sont uniques, ce sont les graphes complets K_n .

Il est naturel d'identifier les blocs d'un design et les arêtes d'un graphe ou d'un hypergraphe. Un couplage est donc un ensemble d'arêtes disjointes.

Remarquons que l'existence de la bijection entre X et X' induite par $P(X', X)$ ne permet pas à une ligne de $P(F, F')$ de contenir plus de $k \cdot p - p$ points car à l'arête de $G(X, F)$ correspondant à cette ligne correspondent par bijection deux sommets de $G(X', F')$, sommets qui ne peuvent (à cause des propriétés d'intersection) appartenir aux arêtes du couplage de $G(X', F')$.

Finalement $P(L, F')$ apparaît comme un graphe cubique ($p - k + 2 = 2$, $k \cdot p - p + 1 = 3$), de même $G(L', F)$. On a déjà remarqué que les arêtes de $G(L, F')$ correspondant au sommet particularisé de $G(X', F')$ forment un couplage parfait de $G(L', F)$. On remarque que ce graphe est le graphe de Petersen.

Dans les plans projectifs d'ordre n impair construits à partir du corps fini d'ordre n on sait construire les $(2, 1; n + 1)$ -designs, ils correspondent aux $(n + 1)$ -arcs qui eux mêmes peuvent être construits à partir des coniques irréductibles [4]. Ces plans contiennent donc des structures correspondant à (L, F') , ce sont des hypergraphes $H(L, F')$ qui ont $n \cdot (n + 1)/2$ (hyper) arêtes. Ces hypergraphes sont $(n - 1)/2$ -uniformes (les arêtes ont le même nombre de points), et réguliers de degré $(n + 1)/2$.

Remarque. On pourrait avoir par cette construction des graphes généralisant le graphe de Petersen. Il suffit que $p - k + 2 = 2$, et donc $p = k$, ce que l'on a dans notre cas. Cependant les propriétés de régularité induites sur ces graphes par la structure de plan

projectif dont ils sont sous structure 'pourraient' en faire des graphes de Moore dont les uniques *ordres* (nombre de sommets) possibles sont 10, 50 et 3250 [1].

Il est assez facile d'appeler Hypergraphes de Petersen des hypergraphes généralisant le graphe de Petersen. C'est pourquoi on s'est efforcé de donner une représentation graphique de ces hypergraphes (on montrera ici la représentation correspondant à l'hypergraphe issu de $Pg(2, 7)$) 'ressemblant' à celle du graphe de Petersen.

Représentation

Tout d'abord on a vu que ces hypergraphes étaient construits à partir d'un $(n+1)$ -arc.

Nous avons construit cet arc au moyen de la conique $y=1/x$.

Nous ne savons pas, en particulier, si une autre conique donnerait un autre hypergraphe.

Nous avons choisi comme point particulier du K_{n+1} correspondant à cet arc le point à l'infini de la droite de l'infini. C'est celui que Segre [4] appelle le *nucleus*.

Dans ces conditions nous avons remarqué que:

Les résidus quadratiques du corps d'ordre n induisent une 2-factorisation du K_n restant. Cette factorisation induit une factorisation 'intéressante' de l'hypergraphe de Petersen associé.

Prenons l'exemple de l'hypergraphe associé à $Pg(2, 7)$; $7=3.2+1$, c'est un hypergraphe 4-régulier et 3-uniforme. Les 7 arêtes correspondant au sommet particularisé forment un couplage parfait que l'on représente en couronne (Fig. 2) comme dans le graphe de Petersen (Fig. 7). Les 7 arêtes correspondant à un des facteurs contiennent 14 des 21 sommets de l'hypergraphe. Il est assez facile ici de partager ces 14 sommets en 2 ensembles de 7 car certains sont rencontrés par 2 arêtes, d'autres par 1, ce qui permet de partitionner les sommets en trois couronnes de 7. En Figs. 3-5 on a représenté les trois ensembles d'arêtes correspondants. Il est difficile de représenter les arêtes d'un hypergraphe, même 3-uniforme. Celles du couplage, leurs sommets étant voisins dans la représentation, sont représentées par un trait (Fig. 2). Les autres arêtes sont composées d'un trait entre deux sommets d'une même couronne plus un sommet d'une autre couronne, sommet entouré d'un cercle. Le troisième sommet correspondant à une arête est le sommet opposé à cette arête.

Nous avons représenté un hypergraphe de Petersen contenu dans $Pg(2, 9)$, $Pg(2, 11)$ et $Pg(2, 13)$. Dans ce dernier cas c'est un hypergraphe 7-régulier et 6-uniforme. Il faut partitionner les 6.13 sommets en 6 ensembles de 13 (dans le graphe de Petersen il y a 2 ensembles de 5). Pour ce faire nous avons réuni les arêtes des facteurs deux à deux; ainsi certains sommets contiennent 0, 1, 2, 3 ou 4 arêtes, en considérant les sommets contenant par exemple 4 arêtes de la paire de facteurs $\{A, B\}$ et 4 de la paire $\{A, C\}$ on peut effectuer cette partition...

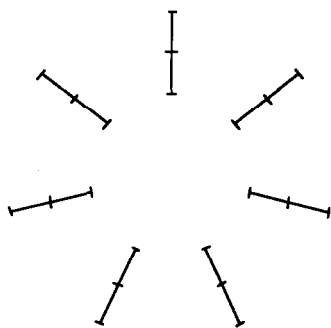


Fig. 2.

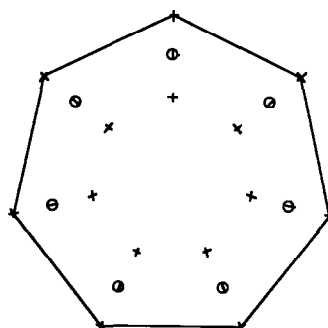


Fig. 3.

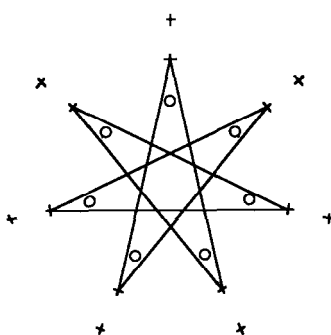


Fig. 4.

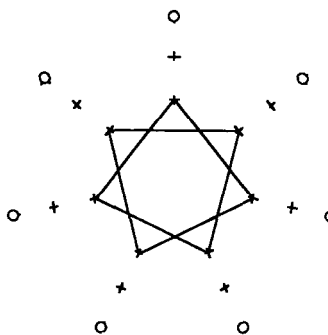


Fig. 5.

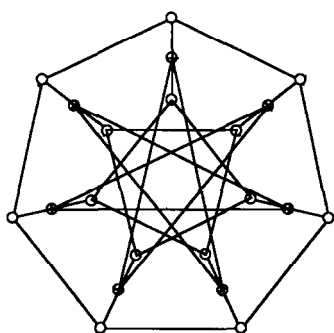


Fig. 6.

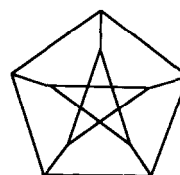


Fig. 7.

Remarquons qu'avant d'avoir fait jouer un rôle particulier aux résidus quadratiques, nous faisons l'inventaire des 2-factorisations. Dans $\text{Pg}(2, 7)$, une seule factorisation induit la factorisation de l'hypergraphe de Petersen correspondant (une fois choisi le sommet particularisé).

Remarquons encore que lorsque l'ordre du plan n'est pas premier (c'est le cas de 9), la factorisation ne se fait pas suivant des cycles (de longueur 9) mais des groupes de 3 cycles de longueur 3!...

Remarquons aussi que les représentations des hypergraphes d'ordre plus élevé ont le même type de régularité...

Conclusion

Nous avons prévenu le lecteur qu'il y aurait dans cet article plus de questions posées que de questions résolues. La question du titre est à peine effleurée. Une des difficultés réside dans la simple définition d'un hypergraphe de Moore, et plus généralement d'un hypergraphe fortement régulier.

A partir de l'ordre $n = 9$ on sait construire des plans projectifs sur autre chose que le corps à n éléments ([1] par exemple). Ces plans contiennent-ils des $(n + 1)$ -arcs? Si oui il serait intéressant de comparer les hypergraphes de Petersen correspondant à un même ordre.

La question des automorphismes de ces hypergraphes semble, elle aussi, intéressante.

Inversement si l'on savait construire un hypergraphe de Petersen (d'ordre 15 par exemple), il serait peut-être possible de le prolonger en un plan projectif...

Références

- [1] M. Hall Jr, Combinatorial Theory, 2nd Ed. (Wiley, New York, 1986).
- [2] J.F. Maurras, k -arcs et designs dans les plans projectifs finis, Document du GRTC CNRS, 1986.
- [3] J.F. Maurras, Sous structures extrêmes dans les plans projectifs finis, cas impair, Document du GRTC CNRS, 1987.
- [4] B. Segre, Lectures on Modern Geometry (Edizioni Cremonese, Roma, 1961).